Применив формулу (9), придем к следующему утверждению:

Т е о р е м а 3. Для того чтобы сеть Σ_n была основанием отображения f, необходимо и достаточно, чтобы для всех $b \neq c$ выполнялось равенство $\sum\limits_{a=1}^{n} \varphi_b^a \varphi_c^a = 0$.

Библиографический список

1. Б а з ы л е в В.Т. Материалы по геометрии /МГПИ им.В.И. Ленина.М.,1978.Вып.1.

2. Б а з ы л е в В.Т. Сети на многообразиях//Тр.геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1974.Т.6.С.189-205.

УДК 514.75

О ВТОРОЙ ПОЛЯРЕ Р-ПОВЕРХНОСТИ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Н.И.М о с к а л е н к о

(МГПИ им.В.И.Ленина)

В статье рассматривается вторая поляра точки $x \in V_p \subset E_n$ относительно присоединенной поверхности и ее некоторые связи с геометрией самой поверхности V_p. Обобщаются результаты исследований по геометрии поверхностей коразмерности два [3] и коразмерности три [4].

Рассмотрим гладкую p-мерную поверхность $V_p\ (p \geq 2)$ в евклидовом пространстве E_n. Отнесем поверхность к подвижному реперу

$$R = (x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha) \quad (i, j, k, t, \ell = \overline{1,p};\ \alpha, \beta = \overline{p+1, n}),$$

где орты e_i принадлежат касательному пространству $T_x(V_p)$ к поверхности V_p в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормальной плоскости $N_{n-p}(x)$ поверхности V_p. Деривационные формулы такого репера имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i;\quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^\alpha \vec{e}_\alpha;\quad d\vec{e}_\alpha = \omega_\alpha^i \vec{e}_i + \omega_\alpha^\beta \vec{e}_\beta.$$

Продолжая систему $\omega^\alpha = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получим равенства $\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j$, $b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha$, где b_{ij}^α -система $n-p$ вторых основных тензоров поверхности $V_p \subset E_n$. При замене базиса $(\vec{e}_\alpha)$ в плоскости $N_{n-p}(x)$ величины b_{ij}^α (i, j фиксированы) преобразуются как координаты вектора.

Имеем систему $\frac{1}{2} p(p+1)$ векторов $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$. В дальнейшем будем предполагать, что число независимых векторов этой системы равно $n-p$, т.е. размерность главной нормали p-поверхности максимальна.

Вектор $\vec{M} = \frac{1}{p} \gamma^{ij} b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$ -есть вектор средней кривизны поверхности V_p в точке x, здесь γ^{ij} -контравариантные компоненты метрического тензора $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ поверхности $V_p \subset E_n$. Будем рассматривать неминимальную поверхность $(\vec{M} \neq \vec{0})\ V_p \subset E_n$. В этом случае к точке $x \in V_p$ инвариантным образом присоединена прямая $(x, \vec{M})$ - средняя нормаль поверхности.

Уравнение

$$\det \| \sum_\alpha b_{ij}^\alpha y^\alpha - \gamma_{ij} \| = 0$$

определяет в плоскости $N_{n-p}(x)$ алгебраическую гиперповерхность порядка p (присоединенную поверхность), не проходящую через точку $x \in V_p$. Так как размерность главной нормали максимальна, то эта поверхность есть фокусная поверхность к поверхности V_p в данной точке x [1]. Если записать это уравнение в однородных координатах

$$F(y^{p+1}, y^{p+2}, \ldots, y^n, y^0) = 0,$$

то в плоскости $N_{n-p}(x)$ уравнение второй поляры точки $x \in V_p$ относительно фокусной поверхности (в дальнейшем для краткости будем опускать слова "относительно фокусной поверхности") имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^\sigma \partial y^\varrho} \right)_x y^\sigma y^\varrho = 0 \qquad (\sigma, \varrho = p+1, p+2, \ldots, n, 0),$$

где частные производные вычисляются в точке x (0,0,0,...,0,1).

Пусть векторы $\vec{e}_i$ репера ортонормированы, тогда $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$. Запишем уравнение фокусной поверхности в виде

$$\det \| \sum_\alpha b_{ij}^\alpha y^\alpha - y^0 \delta_{ij} \| = 0.$$

Раскрывая этот определитель и располагая члены по степеням y^0, получим

$$(-1)^p (y^0)^p + (-1)^{p-1} \Delta_1 (y^0)^{p-1} + (-1)^{p-2} \Delta_2 (y^0)^{p-2} + \ldots + (-1) \Delta_{p-1} y^0 + \Delta_p = 0,$$

где $\Delta_p = \det \| \sum_\alpha b_{ij}^\alpha y^\alpha \|$, а коэффициент при $(y^0)^{p-k}$ равен сумме всех главных миноров k-го порядка последнего определителя. Вычисляя вторые частные производные от левой части последнего уравнения, получим следующее уравнение второй поляры (в ортонормированном репере):

$$a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + 2a_{\alpha 0} y^\alpha + a_{00} = 0,$$

где

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} (b^\alpha_{ii} b^\beta_{jj} + b^\beta_{ii} b^\alpha_{jj} - 2 b^\alpha_{ij} b^\beta_{ij}),$$

$$a_{\alpha 0} = -(p-1)\sum_i b^\alpha_{ii}, \quad a_{00} = p(p-1).$$

Для инварианта $\mathcal{J} = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha}$ второй поляры точки $x \in V_p$ имеем

$$\mathcal{J} = \sum_\alpha \sum_{i,j} (b^\alpha_{ii} b^\alpha_{jj} - (b^\alpha_{ij})^2) = \sum_{i,j} (\vec{b}_{ii}\vec{b}_{jj} - (\vec{b}_{ij})^2). \qquad (1)$$

Используя выражение [2] для координат тензора Римана-Кристоффеля

$$R^{\ell}_{ijk} = \delta^{\ell t}(\vec{b}_{ij}\vec{b}_{tk} - \vec{b}_{ik}\vec{b}_{tj}),$$

найдем скалярную кривизну поверхности $V_p \subset E_n$ в точке x. $R = \delta^{ij} R_{ij}$, где $R_{ij} = R^k_{ijk}$ – тензор Риччи. Имеем

$$R = \delta^{ij}\delta^{kt}(\vec{b}_{ij}\vec{b}_{tk} - \vec{b}_{ik}\vec{b}_{tj}) = \sum_{i,j} (\vec{b}_{ii}\vec{b}_{jj} - (\vec{b}_{ij})^2). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) следует

Т е о р е м а 1. Инвариант $\mathcal{J} = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha}$ второй поляры точки $x \in V_p \subset E_n$ равен скалярной кривизне R поверхности в этой точке.

Рассмотрим сечение второй поляры гиперплоскостью $\vec{M}\,\vec{xy} = 0$, где $\vec{xy} = \vec{y} - \vec{x}$, которая инвариантным образом присоединена к точке $x \in V_p$. Вектор $\vec{e}_{p+1}$ направим по средней нормали. Тогда $\sum_i b^{\tilde\alpha}_{ii} = 0$ $(\tilde\alpha = p+2, p+3, \ldots, n)$. С учетом этого $a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} = -\sum_{i,j} (b^{\tilde\alpha}_{ij})^2$. Случай, когда $a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} = 0$, исключим из рассмотрения (при этом все $b^{\tilde\alpha}_{ij}$ равны нулю, коразмерность поверхности понижается). Направляя векторы $\vec{e}_{\tilde\alpha}$ по главным направлениям сечения и учитывая, что $a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} < 0$, в сечении получим эллипсоид с центром в точке x.

Обратно, если сечение второй поляры есть эллипсоид с центром в точке $x \in V_p$, тогда координаты точки x удовлетворяют уравнениям

$$a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} y^{\tilde\alpha} + a_{\tilde\alpha 0} = 0 \qquad \text{(по } \tilde\alpha \text{ нет суммирования).}$$

Отсюда, так как $a_{\tilde\alpha\tilde\alpha} \neq 0$, имеем $a_{p+2\,0} = 0$, $a_{p+3\,0} = 0, \ldots, a_{n0} = 0$. Тогда $\vec{M} = \frac{1}{p}\sum_i b^{p+1}_{ii}\vec{e}_{p+1}$. Таким образом, верна

Т е о р е м а 2. Из $n-p$ взаимно ортогональных в точке x нормалей неминимальной поверхности $V_p \subset E_n$ одна будет средней нормалью этой поверхности тогда и только тогда, когда гиперплоскость, проходящая через остальные нормали, пересекает вторую поляру точки x по эллипсоиду с центром в этой точке.

С л е д с т в и е. Вторая поляра точки x поверхности $V_p \subset E_n$ не может быть мнимой квадрикой.

Для одномерной нормали $(x, \vec{n}) \subset N_{n-p}(x)$, где $\vec{n}$ – орт этой нормали, и всякого направления (ω^i) на поверхности V_p определен вектор $\vec{\tau} = \frac{d_T\vec{n}}{ds}$, где $ds^2 = \gamma_{ij}\omega^i\omega^j$, $d_T\vec{n}$ – ортогональная проекция вектора $d\vec{n}$ на касательную плоскость, который называется вектором Родрига для данного направления и данного орта $\vec{n}$ [2]. Векторы Родрига относительно ортов $\vec{e}_\alpha$ для направлений линий ω^i сети линий кривизны относительно средней нормали $(\vec{e}_{p+1} \parallel \vec{M})$ находятся следующим образом:

$$\vec{\tau}^\alpha_i = -\sum_j b^\alpha_{ij}\vec{e}_j.$$

Коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ второй поляры при этом выражаются через векторы Родрига так:

$$a_{\alpha\beta} = -\sum_i \vec{\tau}^\alpha_i \vec{\tau}^\beta_i \quad (\alpha \neq \beta).$$

Если средняя нормаль имеет главное направление относительно второй поляры, то, направляя векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\vec{e}_{p+1} \parallel \vec{M})$ по главным направлениям второй поляры, имеем $a_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$, т.е.

$$\sum_i \vec{\tau}^\alpha_i \vec{\tau}^\beta_i = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Если же $a_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$, то известно, что уравнение второй поляры приведено к главным направлениям. Учитывая, что вектор $\vec{e}_{p+1} \parallel \vec{M}$, имеем теорему

Т е о р е м а 3. Средняя нормаль поверхности $V_p \subset E_n$ в точке $x \in V_p$ имеет главное направление относительно второй поляры этой точки тогда и только тогда, когда

$$\sum \vec{\tau}^\alpha_i \vec{\tau}^\beta_i = 0 \quad (\alpha \neq \beta).$$

Пусть средняя нормаль имеет главное направление относительно второй поляры. Уравнение второй поляры при этом можно привести к виду ($\vec{e}_\alpha$ направлены по главным направлениям, $\vec{e}_{p+1} \parallel \vec{M}$) $\sum_\alpha a_{\alpha\alpha}(y^\alpha)^2 + 2a_{p+1\,0}\,y^{p+1} + a_{00} = 0.$

Если $\det \|a_{\alpha\alpha}\| \neq 0$, то вторая поляра имеет единственный центр. Так как $a_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}} \neq 0$ и $a_{p+1 0} \neq 0$, то всегда

$$\operatorname{rang} \|a_{\alpha\alpha},\ a_{p+1 0}\| = n-p.$$

Если $\det \|a_{\alpha\alpha}\| = 0$, то тогда

$$\operatorname{rang} \|a_{\alpha\alpha}\| \neq \operatorname{rang} \|a_{\alpha\alpha},\ a_{p+1 0}\|,$$

т. е. вторая поляра не имеет центра. Ясно, что случая, когда

$$\operatorname{rang} \|a_{\alpha\alpha}\| = \operatorname{rang} \|a_{\alpha\alpha},\ a_{p+1 0}\| = r,$$

где $r < n-p$, быть не может, т.е. вторая поляра не может иметь $(p-r)$ -плоскость центров.

Если вторая поляра имеет центр, то она будет вырожденной, если

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{\alpha\alpha} & a_{\alpha 0} \\ a_{\alpha 0} & a_{00} \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя определитель δ, получим

$$\delta = a_{nn}\, a_{n-1\, n-1} \ldots a_{p+2\, p+2}\, (a_{p+1\, p+1}\, a_{00} - a^2_{p+1 0}). \tag{3}$$

Так как $a_{\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}} \neq 0$, то $\delta = 0$, если

$$a_{p+1\, p+1}\, a_{00} - a^2_{p+1 0} = 0. \tag{4}$$

Если вторая поляра не имеет центра, то из (3), учитывая, что $a_{p+1 0} \neq 0$, следует, что вторая поляра не может быть нецентральной вырожденной. Из выше изложенного вытекает следующий вывод.

Если средняя нормаль поверхности $V_p \subset E_n$ имеет главное направление относительно второй поляры точки $x \in V_p$, то вторая поляра этой точки может быть немнимой центральной как вырожденной (выполнено условие (4)), так и невырожденной, а также нецентральной невырожденной квадрикой.

Если вторая поляра – центральная, то справедлива

Т е о р е м а 4. Средняя нормаль $(x, \vec{M})$ поверхности V_p в точке $x \in V_p$ проходит через центр второй поляры этой точки (когда вторая поляра центральная) тогда и только тогда, когда ее направление является главным для второй поляры.

Библиографический список

I.Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом

пространстве //Лит.мат.сб./АН Лит.ССР.Вильнюс,1966.Т.6.№4. С.475-49I.

2.Б а з ы л е в В.Т. Об одном аддитивном представлении тензора Риччи p-поверхности евклидова пространства//Сиб.матем. журн. 1966.Т.7.§3.С.499-5II.

3.Е с и н В.А. О поверхностях коразмерности два//Геометрия погруженных многообразий:Сб.науч.тр./МГПИ им В.И.Ленина. М.,I98I.С.40-44.

4.Е ф р о с П.П. О поверхностях коразмерности три//Геометрия погруженных многообразий:Сб.науч.тр./МГПИ им.В.И.Ленина. М.,1986.С.26-30.

УДК 5I4.75

О НОРМАЛЬНО ОСНАЩАЮЩИХ ПОЛЯХ НА ПОДМНОГООБРАЗИЯХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЧТИ КВАТЕРНИОННОЙ И ПОЧТИ КОНТАКТНОЙ СТРУКТУРЫ

Е.В.Опольская, Р.Ф.Домбровский
(Черновицкий ун-т)

В настоящей статье развиваются некоторые тезисы докладов, сделанных авторами на Всесоюзной геометрической конференции в Кишиневе [7],[8].

I.Пусть $M_{2n}(\varphi,\psi)$ -вещественное многообразие почти кватернионной структуры (φ,ψ), определенной полями аффиноров φ и ψ. Если $T_x(M_{2n})$ слой касательного расслоения над M_{2n}, соответствующий точке $x \in M_{2n}$, и $T^*_x(M_{2n})$-сопряженное ему пространство, то φ, ψ и $\varphi \circ \psi$ принадлежат пространству $T_x(M_{2n}) \otimes T^*_x(M_{2n})$ и удовлетворяют соотношениям $\varphi^2 = -\underline{I}$, $\psi^2 = -\underline{I}$, $\varphi \circ \psi = -\psi \circ \varphi$.

Рассмотрим подмногообразие $\mathfrak{M}_n$ многообразия $M_{2n}(\varphi,\psi)$ такое, что слои касательного расслоения $T\mathfrak{M}_n = \bigcup_{x \in \mathfrak{M}_n} \Lambda_x$ имеют строение $\Lambda_x = \underset{x}{\Lambda}_\varphi \otimes \underset{x}{\Lambda}_\psi$, $\underset{x}{\Lambda}_\varphi = \Lambda_x \cap \varphi(\Lambda_x)$, $\dim \underset{x}{\Lambda}_\varphi = r$, $\underset{x}{\Lambda}_\psi = \Lambda_x \cap \psi(\Lambda_x)$, $\dim \underset{x}{\Lambda}_\psi = n-r$ для произвольного $x \in \mathfrak{M}_n$. Подмногообразия $\mathfrak{M}_n$ существуют в многообразиях почти кватернионной структуры. Например, они существуют для тех многообразий $M_{2n}(\varphi,\psi)$, каждая точка x_0 которых допускает такую окрестность $\mathcal{U}_{x_0}$, что для произвольного $x \in \mathcal{U}_{x_0}$ существует подпространство $V_x \subset T_x(M_{2n})$, $\dim V_x = n$, что $T_x(M_{2n}) = \varphi(V_x) \oplus \psi(V_x)$. $\underset{x}{\Lambda}_\varphi$ и $\underset{x}{\Lambda}_\psi$ – голоморфные касательные пространства подмногообразия $\mathfrak{M}_n$ [3]. Они на $\mathfrak{M}_n$ имеют постоянную размерность, следова-